Mecánica Estadística

Evaluación continua. Segundo control

25/04/2025

Problemas

Nota: Debe elegirse uno de los dos ejercicios propuestos a continuación.

1. *Condensación de Bose-Einstein.* Considérese un gas de bosones en una caja D dimensional y de spin 0 y con una relación de dispersión de la forma $\epsilon = \alpha k^n$, con $n > 0$ y α una constante de proporcionalidad.

   a) (*3 puntos*) Calcúlese la densidad de estados $g(\epsilon)$ en función de D, n y α.

   b) (*3 puntos*) Obténgase la relación entre n y D para que exista condensación de Bose-Einstein.

   c) (*4 puntos*) Obténgase la temperatura de Bose del sistema en función de D, n y de la densidad de partículas.

2. *Gas de fermiones.* Un gas cuántico en una caja tridimensional de volumen V está constituido por fermiones de espín $\frac{3}{2}$ que no interactúan entre sí. Suponiendo que la energía de cada fermión viene dada por $\epsilon = \alpha k^n$, con $n > 0$ y α una constante de proporcionalidad cuyas dimensiones dependen de n, calcule:

   a) (*3 puntos*) La función densidad de estados $g(\epsilon)$.

   b) (*3 puntos*) El valor de la energía de Fermi en función de la densidad de partículas ($\rho = \frac{\bar{N}}{V}$).

   c) (*4 puntos*) Demuéstrese que la ecuación de estado térmica es $\bar{p}V = \frac{n}{3}\bar{E}$.

PROBLEMA 1 (BOSE)

· (a) $g(\varepsilon)$

Bosones de spin 0 $\Rightarrow g_s = 2S+1 = 1$

Caja de dimensión D. $\varepsilon = \alpha K^n \Rightarrow K = (\varepsilon/\alpha)^{1/n}$

$$N(K) = \frac{K^D \pi^{D/2} / \Gamma(D/2+1)}{(2\pi/a)^D} = \frac{K^D \pi^{D/2} V}{2^D \pi^D \Gamma(D/2+1)} = \frac{K^D V}{2^D \pi^{D/2} \Gamma(D/2+1)} \Rightarrow \Gamma(\varepsilon) = \frac{V}{2^D \pi^{D/2} \Gamma(D/2+1)} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{D/n}$$

$$g(\varepsilon) = g_s \frac{d\Gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{V}{2^D \pi^{D/2} \alpha^{D/n} \Gamma(D/2+1)} \frac{D}{n} \varepsilon^{D/n - 1}$$

· (b) condensación, relación entre n y D.

Para que exista condensación de Bose-Einstein : $N_{exc} < \infty$

$$\bar{N} = \sum_r n_r = \int_0^\infty n(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \overset{\mu=0}{=} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \cdot \frac{VD}{2^D \pi^{D/2} \alpha^{D/n} \Gamma(D/2+1) n} \varepsilon^{D/n - 1} d\varepsilon =$$

$$= \frac{VD}{2^D \pi^{D/2} \alpha^{D/n} n \Gamma(D/2+1)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/n - 1}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \Rightarrow \text{converge si } D/n - 1 > 0$$

$\hookrightarrow D > n$

· (c) T_B

$$A\ T_B : \begin{cases} \bar{n}_0 = 0 \Rightarrow \bar{N}_{exc} \approx \bar{N} \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Resolvemos la integral anterior:

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/n - 1}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \overset{\substack{x = \beta\varepsilon \\ dx = \beta d\varepsilon}}{=} \int_0^\infty \frac{x^{D/n - 1}}{\beta^{D/n - 1}} \cdot \frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{\beta} = \frac{1}{\beta^{D/n}} \int_0^\infty \frac{x^{D/n - 1}}{e^x - 1} dx =$$

$$= \frac{1}{\beta^{D/n}} \cdot \Gamma(D/n) \zeta(D/n)$$

$$\bar{N} = \frac{VD}{2^D \pi^{D/2} \alpha^{D/n} n \underbrace{\Gamma(D/2+1)}_{(D/2)!}} \cdot \frac{1}{\beta^{D/n}} \overbrace{\Gamma(D/n)}^{(D/n-1)!} \zeta(D/n) \Rightarrow \frac{1}{\beta} = K_B T_B$$

$$T_B = \frac{1}{K_B \beta} = \frac{\alpha}{K_B} \left(\frac{\bar{N} 2^D \pi^{D/2} n \Gamma(D/2+1)}{V D \Gamma(D/n) \zeta(D/n)} \right)^{n/D} = \frac{\alpha}{K_B} \left(\frac{\rho 2^D \pi^{D/2} n \Gamma(D/2+1)}{D \Gamma(D/n) \zeta(D/n)} \right)^{n/D}$$

PROBLEMA 2 (FERMI)

· **(a)** $g(\varepsilon)$

Fermiones de spin $3/2 \Rightarrow g_s = 2S+1 = 4$

Caja 3D. $\varepsilon = \alpha K^n \Rightarrow K = (\varepsilon/\alpha)^{1/n}$

$$N(K) = \frac{4\pi K^3/3}{(2\pi/a)^3} = \frac{4\pi K^3 V}{3\cdot 8\pi^3} = \frac{VK^3}{6\pi^2} \Rightarrow \Gamma(\varepsilon) = \frac{V}{6\pi^2}(\varepsilon/\alpha)^{3/n}$$

$$g(\varepsilon) = g_s \cdot \frac{d\Gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 4\cdot\frac{V}{6\pi^2}\cdot\frac{3}{n}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{3}{n}-1}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{2V}{n\pi^2\alpha^{3/n}}\cdot\varepsilon^{3/n-1}$$

· **(b)** ε_F

$$\bar{N} = \sum_r n_r = \int_0^\infty n(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon \overset{T=0K}{=} \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2V}{n\pi^2\alpha^{3/n}}\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^{3/n-1}d\varepsilon = \frac{2V}{\cancel{n}\pi^2\alpha^{3/n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{3}\varepsilon_F^{3/n} = \frac{2V}{3\pi^2\alpha^{3/n}}\varepsilon_F^{3/n}$$

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3\pi^2\alpha^{3/n}\bar{N}}{2V}\right)^{n/3} = \alpha\left(\frac{3\pi^2\bar{N}}{2V}\right)^{n/3} = \alpha\left(\frac{3\pi^2\rho}{2}\right)^{n/3}$$

· **(c)** $\bar{p}V = \frac{n}{3}\bar{E}$

$$\bar{E} = \sum_r n_r\varepsilon_r = \int_0^\infty n(\varepsilon)g(\varepsilon)\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{2V}{n\pi^2\alpha^{3/n}}\int_0^\infty \varepsilon\cdot\varepsilon^{3/n-1}\cdot\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}d\varepsilon = \frac{2V}{n\pi^2\alpha^{3/n}}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/n}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}d\varepsilon$$

$\bar{p}V = K_B T \ln \Xi$

$$\ln\Xi = \sum\ln(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}) = \int_0^\infty g(\varepsilon)\ln(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})d\varepsilon = \frac{2V}{n\pi^2\alpha^{3/n}}\int_0^\infty \underbrace{\ln(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})}_{u}\cdot\underbrace{\varepsilon^{3/n-1}d\varepsilon}_{dv} =$$

$$= \frac{2V}{n\pi^2\alpha^{3/n}}\left\{\cancel{\frac{n}{3}\varepsilon^{3/n}\cdot\ln(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)})\Big|_0^\infty} - \int_0^\infty\frac{n}{3}\varepsilon^{3/n}\cdot\frac{-\beta e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}d\varepsilon\right\} =$$

$$= \frac{2V}{\cancel{n}\pi^2\alpha^{3/n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{3}\beta\int_0^\infty\varepsilon^{3/n}\frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}d\varepsilon = \frac{2V\beta}{3\pi^2\alpha^{3/n}}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/n}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}d\varepsilon \Rightarrow \ln\Xi = \frac{\beta n}{3}\bar{E}$$

$$\bar{p}V = K_B T\ln\Xi = \cancel{K_B T}\frac{\cancel{\beta}n}{3}\bar{E} = \frac{n}{3}\bar{E}$$